ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ГРАФА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ В ВИДЕ СЕТИ АВТОМАТОВ

Погребной А. В.
Томский политехнический университет
e-mail: avpogrebnoy@gmail.com

Под идентификацией структуры графа будем понимать получение для него такого описания, которое является инвариантным относительно нумерации вершин и представляет граф с точностью до изоморфизма. В этом определении отмечается три важных момента: описание, инвариантность и изоморфизм. Идентификация здесь рассматривается как поиск описания графа, отвечающего требованиям инвариантности и изоморфизма. Граф в результате идентификации должен получить уникальный описатель, который не зависит от нумерации вершин. Совпадение описателей графов должно гарантировать их изоморфизм.

В отличие от поиска такого описания многие исследования были сосредоточены на поиске числовых характеристик, отражающих свойства структуры графа. Характеристики, для которых соблюдается только первое требование. стали называть инвариантами [1]. Попытки поиска числовой характеристики, удовлетворяющей обоим требованиям, получившей название полного инварианта графа, не увенчались успехом. Известен только один полный инвариант в виде миникода [2], но для его получения требуется объём вычислений сопоставимый с проверкой на изоморфизм.

При решении проблемы получения полного инварианта нет никаких оснований противопоставлять его вид – числовая характеристика или описатель. Очевидно также, что предпочтение следует отдать описателю, т.к. функциональные возможности описателя шире.

Рассмотрим один из традиционных способов представления графа $G = (E, U)$ с множеством вершин $E = \{e_i\}$ и множеством рёбер $U = \{u_{ij}\}$, $i, j = 1, 2,\ldots, n$ в виде списка инциденторов $F(e_i)$ вершин e_i. Недостаток такого описания заключается в том, что один и тот же граф с разными нумерациями вершин будет иметь разные списки $\{e_i(F(e_i))\}$ и восприниматься разными графами. Получается, что, заменив произвольные номера вершин e_i на некоторые однозначно устанавливаемые номера d_i, мы получим описание в виде $\{d_i(F(d_i))\}$, которое однозначно идентифицирует структуру графа.

Таким образом, решение проблемы идентификации структуры графа и получения для него полного инварианта сводится к разработке правил однозначного установления номеров d_i. Согласно этим правилам значение d_i должно отражать уникальность вершины e_i в структуре графа. Для достижения этого нужно научиться различать (дифференцировать) вершины, выделяя признаки уникальности положения для каждой из них в структуре графа и однозначно описывая эти признаки.

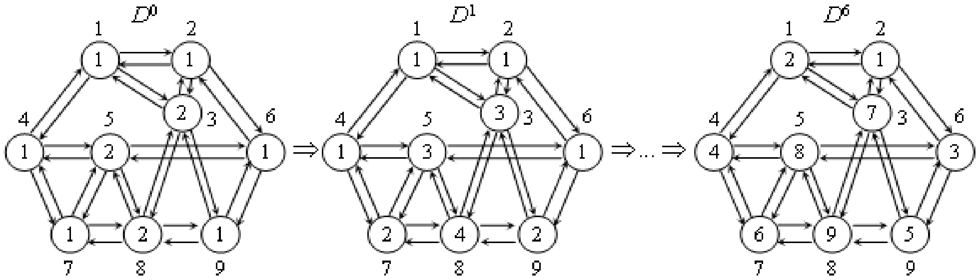
Положение вершины в структуре графа будем определять по трём видам структурных различий – вычисляемые, скрытые, виртуальные, а также по отношениям между ними.

К вычисляемым относятся любые легко определяемые характеристики вершин, которые приводят к их дифференциации. Такой характеристикой для неоднородного графа является, например, степень s_i вершины e_i, $s_i = |F(e_i)|$. Скрытые различия фиксируют конфигурации отношений между вершинами в структуре графа с учётом их структурных различий вычисляемого вида. Априорно выявить всё многообразие конфигураций отношений не представляется возможным. Поэтому такие различия названы скрытыми. Виртуальные структурные различия вводятся в тех случаях, когда на основе вычисляемых и скрытых различий не удаётся достичь полной дифференциации вершин.

Применение одного или нескольких легко вычисляемых различий, как правило, приводит к начальной (неполной) дифференциации. Для обозначения уникальных номеров d_i вершин e_i будем использовать числа натурального ряда (1, 2,…, n). Тогда начальное (нулевое) состояние дифференциации обозначим вектором $D^0 = \{d_i^0\}$, $i = 1, 2,\ldots, n$. Если на основе вычисляемых различий удаётся достигнуть полной дифференциации, т.е. $\max(d_i^0) = n$, то формируется описатель структуры и, соответственно, полный инвариант.

Для продолжения дифференциации от состояния D^0 до состояния $D^k = D$ с полной дифференциацией вершин предлагается структуру графа представлять динамической системой в виде сети автоматов. Каждой вершине структуры ставится в соответствие автомат. Взаимодействие между автоматами осуществляется по каналам связи, которые соответствуют рёбрам графа.

При функционировании динамической системы в дискретном времени накапливается и интегрируется информация о скрытых различиях относительно всех вершин структуры. В k-й момент дискретного времени оператор Int переводит систему из состояния D^k в D^{k+1}, вычисляя $d_i^{k+1} = Int[\{d_i^k(F(d_i^k))\}]$. В итоге процесс дифференциации можно представить траекторией смены состояний динамической системы. Автоматы сети в переходе $D^k \Rightarrow D^{k+1}$, находясь в состоянии D^k, обмениваются по каналам связи состояниями d_i^k и формируют список записей $\{d_i^k(F(d_i^k))\}$. Оператор *Int* на основе записи $d_i^k(F(d_i^k))$ и состояния D^k устанавливает для *i*-го автомата новое состояние d_i^{k+1}. На рисунке показан пример процесса дифференциации вершин.



$e_i(F(e_i))$	s_i	$d_i^0(F(d_i^0))$	$d_i^1(F(d_i^1))$	$d_i^2(F(d_i^2))$	$d_i^3(F(d_i^3))$	$d_i^4(F(d_i^4))$	$d_i^5(F(d_i^5))$	$d_i^6(F(d_i^6))$
1(234)	3	1(112)	1(113)	1(124)	1(124)	1(125)	1(136)	2(147)
2(136)	3	1(112)	1(113)	1(124)	1(124)	1(125)	1(126)	1(237)
3(1289)	4	2(1112)	3(1124)	4(1135)	4(1136)	5(1137)	6(1148)	7(1259)
4(157)	3	1(112)	1(123)	2(134)	2(135)	2(146)	3(157)	4(268)
5(4678)	4	2(1112)	3(1124)	4(2235)	5(2236)	6(2247)	7(2358)	8(3469)
6(259)	3	1(112)	1(123)	2(134)	2(135)	2(136)	2(147)	3(158)
7(458)	3	1(122)	2(134)	3(245)	3(256)	4(267)	5(378)	6(489)
8(3579)	4	2(1122)	4(2233)	5(3344)	6(3345)	7(3456)	8(4567)	9(5678)
9(368)	3	1(122)	2(134)	3(245)	3(246)	3(257)	4(268)	5(379)

Рис. 1. Пример процесса дифференциации вершин.

Автоматы на рисунке представлены кружками. Внутри кружков указаны состояния d_i^k, вне кружков номера соответствующих вершин e_i. Начальное состояние *i*-го автомата d_i^0 определяется по степени s_i вершины e_i. Автоматы с наименьшей степенью вершин получают значения $d_i^0 = 1$. Для следующей по величине степени $d_i^0 = 2$ и т.д.

Из примера следует, что для достижения полной дифференциации в траектории смены состояний потребовалось выполнить 6 переходов $D^k \Rightarrow D^{k+1}$. Все состояния в виде списков записей $d_i^k(F(d_i^k))$, формируемых автоматами, приведены на рисунке. В инциденторах $F(e_i)$ и $F(d_i^k)$ элементы не разделены запятыми, т.к. все значения одноразрядные числа. Алгоритм оператора *Int* в базовом варианте, который применен в данном примере, сводится к следующему. Записи $d_i^k(F(d_i^k))$ в списке $\{d_i^k(F(d_i^k))\}$ упорядочиваются по возрастанию значений d_i^k, а среди записей с равными значениями d_i^k – по возрастанию числовых эквивалентов инциденторов $F(d_i^k)$. Первая запись $d_i^k(F(d_i^k))$ получает интегральное значение $d_i^{k+1} = 1$. Вторая запись, если не равна 1-й, получает $d_i^{k+1} = 2$ и т.д. В итоге все разные записи получают разные значения d_i^{k+1}. Оператор *Int* имеет ряд модификаций, связанных с перезапуском процесса дифференциации с помощью виртуальных различий [3].

Для приведенного примера с помощью базового алгоритма оператора *Int*, получен описатель $\{d_i^6(F(d_i^6))\} = \{d_i(F(d_i))\}$, который идентифицирует структуру графа независимо от исходной нумерации вершин. Это означает, что точно такой же описатель будет получен при любой другой нумерации вершин. Если в описателе $\{d_i(F(d_i))\}$ упорядочить записи по возрастанию значений d_i, то получим полный инвариант графа.

Список литературы

1. Зыков А.А. Основы теории графов. – Москва: Вузовская книга, 2004. – 664с.
2. Balasubramanian K. Parthasarathy K. R. In search of a complete invariant for graphs // Lect. Notes Malthem. – 1981. – V. 885. – P. 42-59.
3. Погребной В.К., Погребной Ан.В. Полиномиальный алгоритм вычисления полного инварианта графа на основе интегрального описателя структуры // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т.323. - № 5. – с. 152-159.